837. 中野氏ノ談話ニツイテ

角谷 靜夫（阪大）

P. Q ヲ Hilbert space $\mathfrak{H}$ ノ任意ノ二ツノ Projection トスルトキ（必ズシモ PQ＝QP デナイトスル）$\lim_{n\to\infty}(PQ)^n = R$ ガ strongly ニ存在シテ、シカモ R ガ P 及ビ Q ノ定メル Manifold $\mathfrak{M}_P$, $\mathfrak{M}_Q$ ノ共通部分 $\mathfrak{M}_P \cdot \mathfrak{M}_Q = \mathfrak{M}_R$ ヘノ projection ニナツテヰルコトヲ中野氏ガ証明サレタ。中野氏ハコノ定理ヲ Hermitian operator ニ関スル spectral representation ヲ使ツテ証明サレタ．本談話ニ於テハ spectral representation ヲ使ハナイ証明ヲ與ヘヨウ。

先ヅ最初ニ $\mathfrak{M}_P \cdot \mathfrak{M}_Q = 0$ ナル場合ニ $(PQ)^n \to 0$ (strongly) トナルコトヲ証明スレバ十分デアルコトニ注意スル．

コレヲ示スタメニ $\mathfrak{M}_P \cdot \mathfrak{M}_Q = \mathfrak{M}_R$ トオキ $\mathfrak{M}_R$ ヘノ projection ヲ R トスレバ $RP = PR = RQ = QR = R^2 = R$ デアル。ヨツテ $(PQ)^n = (R + (PQ - R))^n = (R + (P-R)(Q-R))^n = R + ((P-R)(Q-R))^n$

然ルニ $\mathfrak{M}_{P-R} \cdot \mathfrak{M}_{Q-R} = 0$ ナル故 $((P-R)(Q-R))^n \to 0$ (strongly) ニヨツテ $(PQ)^n \to R$ (strongly).

次ニ $\mathfrak{M}_P \cdot \mathfrak{M}_Q = 0$ ナルトキ $(PQ)^n \to 0$ (strongly) トナルコトヲ証明シヨウ. 任意ノ $x \in \mathfrak{H}$ ニ対シテ $(PQ)^n x = x_n$, $Q(PQ)^n x \equiv Qx_n = x'_n$ トオク.
$\| x_n \| \geqq \| x'_n \| \geqq \| x_{n+1} \|$ デアル. 先ヅ $x_n \to 0$ (weakly) ナルコトヲ証明スル. $\mathfrak{H}$ ハ locally weakly compact デアルカラ、コレヲ示スニハ任意ノ $\{x_n\}$ ノ部分列 $\{x_{n_\nu}\}$ ガ弱収斂シタトキソノ極限 $\bar{x}$ ガ 0 以外デハアリ得ヌコトヲ示セバヨイ。然ルニ $x_{n_\nu} \to \bar{x}$ (weakly) ナラバ $x_{n_\nu+1} = PQx_{n_\nu} \longrightarrow PQ\bar{x}$ (weakly) ニテ且ツ $\| x_{n_\nu} - x_{n_\nu+1} \|^2 \leqq (\| x_{n_\nu} - x'_{n_\nu} \| + \| x'_{n_\nu} - x_{n_\nu+1} \|)^2$

$$\leqq 2(\| x_{n_\nu} - x'_{n_\nu} \|^2 + \| x'_{n_\nu} - x_{n_\nu} \|^2)$$

$$= 2(\| x_{n_\nu} \|^2 - \| x'_{n_\nu} \|^2 + \| x'_{n_\nu} \|^2 - \| x_{n_\nu+1} \|^2)$$

$$= 2(\| x_{n_\nu} \|^2 - \| x_{n_\nu+1} \|^2) \to 0$$

デアルカラ $PQ\bar{x} = \bar{x}$ デナケレバナラヌ. コレヨリ $P\bar{x} = Q\bar{x} = \bar{x}$ ヲ得ルカラ $\bar{x} = 0$ デナケレバナラヌ。

コレデ $x_n \to 0$ (weakly) トナルコトガ証明出来.

4. $x_n \to 0$ (strongly) トナルコトハ

$$\|x_n\|^2 = ((PQ)^n x, (PQ)^n x) = (x, (QP)^n (PQ)^n x)$$

$$= (x, Q(PQ)^{2n-1} x) = (x, x'_{2n-1}) \to 0$$

トナルコトヨリワカル。

コレデ定理ノ証明ガ終ル。同様ニシテ更ニ任意ノ有限個ノ projection $P_1, P_2, \cdots\cdots, P_k$ ニ対シテ $(P_1 P_2 \cdots\cdots P_k)^n \to R$ (weakly) (R ハ $\mathfrak{m}_{P_1} \cdot \mathfrak{m}_{P_2} \cdots\cdots \mathfrak{m}_{P_k} \equiv \mathfrak{m}_R$ ヘノ projection) トナルコトガワカル。シカシコレガ強収斂デオキカヘラレルカドウカハ必ズワカラナイ。